



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

## CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
16 martie 2019



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

### Problema 1.

Pentru numerele impare  $x \in \mathbb{Z}$ , considerăm matricele  $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  și mulțimea  $G = \{A(x) / x \in \mathbb{Z}, x \text{ număr impar}\}$ .

- Arătați că înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe  $G$  și  $(G; \cdot)$  este grup abelian.
- Arătați că orice matrice  $A(x)$  din  $G$  este inversabilă în  $(G; \cdot)$ , cu toate că  $\det A(x) = 0$ . Explicați acest fapt.
- Demonstrați că  $f: G \rightarrow 2\mathbb{Z}$ ,  $f(A(x)) = x+1$  este izomorfism de la  $(G; \cdot)$  la  $(2\mathbb{Z}; +)$ , unde  $2\mathbb{Z} = \{2x / x \in \mathbb{Z}\}$ .

### Problema 2.

Pe  $\mathbb{Z}$  definim legea  $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{Z}$ . Se cere:

- Arătați că " $\circ$ " este asociativă și  $(\mathbb{Z}; \circ)$  are element neutru  $e = 4$ .
- Determinați mulțimea elementelor inversabile în  $(\mathbb{Z}; \circ)$ .
- Cu notația  $x^{(n)} = \underbrace{x \circ x \circ x \circ \dots \circ x}_{x \text{ apare de } n \text{-ori}}$ , rezolvați ecuația  $x^{(2019)} = x$ , în necunoscuta  $x \in \mathbb{Z}$ .

### Problema 3.

Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{x^2}$  și  $F$  primitiva funcției  $f$ , care verifică  $F(1) = 0$ .

- Arătați că  $\int_0^1 x f(x) dx = \frac{e-1}{2}$ .
- Calculați  $\int_0^1 F(x) dx$ .
- Calculați  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt$ .

### Problema 4.

În urma unui studiu, s-a constatat că rata de memorare a cuvintelor vocabularului limbii engleze, pe parcursul unei lecții de 50 minute, este dată de relația  $M(t) = [f(t)]$ , unde  $[x]$  reprezintă *partea întreagă* a numărului  $x \in \mathbb{R}$  iar  $f$  este o

funcție  $f: [0; 50] \rightarrow \mathbb{R}$ , care verifică  $f'(t) = \frac{6t}{100} - \frac{t^2}{1000} + \frac{3}{(t+1)^2}$  și  $f(0) = 0$ , respectiv  $M(t)$  reprezintă numărul total de cuvinte noi memorate de un cursant pe intervalul de minute  $[0; t]$  din parcursul lecției.

- Arătați că  $f(t) = \frac{t^2(90-t)}{3000} + \frac{3t}{t+1}$ .
- Determinați numărul total de cuvinte noi memorate de un cursant la momentul de minut  $t = 10$  al lecției.
- Determinați câte cuvinte noi memorează un cursant în intervalul ultimelor 20 de minute din parcursul orei.

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.